E.N.S. de Cachan
M2 FE
Physique appliquée

Département E.E.A.
3e année
2011-2012

TD de Physique n^o 4 : Mécanique du solide

Exercice n^o 1 : **Cavité dans une boule**

Soit un système matériel constitué d'une boule de centre O, de rayon R, homogène, de masse volumique ρ dans laquelle une cavité sphérique de centre O' et de rayon R' a été creusée. Déterminer la position du centre de masse C du système.

Exercice n^o 2 : **Centre de masse d'une demi-sphère**

Soit une demi-sphère homogène de rayon R. Déterminer la position de son centre de masse C.

Exercice n^o 3 : **Centre de masse d'un cône**

Soit un cône homogène de hauteur h et dont le rayon de sa base est R. Déterminer la position de son centre de masse C.

Exercice n^o 4 : **Théorème du centre de masse (cours)**

On considère un système constitué de N points matériels M_i de masse m_i dont le centre de masse sera noté C. Le référentiel d'étude est $\mathscr{R}$.

1. Déterminer l'expression de la quantité de mouvement du système dans le référentiel $\mathscr{R}$ en fonction de m la masse totale du système et de la vitesse du centre de masse C. Que vaut la quantité de mouvement du système dans son référentiel barycentrique ?

2. Démontrer le théorème du centre de masse en appliquant les lois de Newton aux points M_i du système.

3. Une fusée se propulse en éjectant vers l'arrière une masse de gaz $dm = D_m dt$ pendant l'intervalle de temps dt avec une vitesse relative $\vec{u}$ par rapport à la fusée.

a) Peut-on appliquer le théorème du centre de masse au système formé de la fusée et du gaz contenu à l'intérieur ?

b) On considère alors le système fermé constitué :

- à t, de la fusée et du gaz contenu à l'intérieur à t,
- à $t + dt$, de la fusée, du gaz contenu à l'intérieur à $t + dt$ et du gaz qui a quitté la fusée entre t et $t + dt$.

Dessiner le système à t et à $t + dt$. Écrire sa quantité de mouvement à ces deux instants.

c) La fusée étant soumise au champ de pesanteur terrestre, appliquer le théorème du centre de masse au système considéré en b).

d) Faire apparaître une force de poussée.

Exercice n^o 5 : **Moment cinétique (cours)**

On considère un système constitué de N points matériels M_i de masse m_i dont le centre de masse sera noté C. Le référentiel d'étude est $\mathscr{R}$.

1. Établir la relation existant entre le moment cinétique du système en A dans $\mathscr{R}$ et le moment cinétique du système en A' dans $\mathscr{R}$. Quelle est la particularité des moments cinétiques calculés dans le référentiel barycentrique ?

2. Établir le théorème de Kœnig. Ce théorème relie le moment cinétique en A dans $\mathscr{R}$ au moment cinétique barycentrique. À quoi est alors égal le moment cinétique en C (centre de masse du système) dans $\mathscr{R}$ du système ?

3. Établir le théorème du moment cinétique en un point A mobile dans $\mathscr{R}$. On fera l'hypothèse peu contraignante selon laquelle la force qu'exerce la masse i sur la masse j a la direction du vecteur $\overrightarrow{M_iM_j}$. Examiner le cas où A est fixe dans $\mathscr{R}$.

***Exercice n^o 6 :* Théorème de l'énergie mécanique (cours)**

On considère un système constitué de N points matériels M_i de masse m_i dont le centre de masse sera noté C. Le référentiel d'étude est $\mathscr{R}$.

1. Établir le théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique.

2. La puissance des forces intérieures $\mathscr{P}_{int}$ peut être décomposée en termes $\mathscr{P}_{ij}$ comprenant la puissance de la force exercée par M_j sur M_i et la puissance de la force exercée par M_i sur M_j. Exprimer $\mathscr{P}_{ij}$ à l'aide de $\vec{f}_{i\to j}$ la force qu'exerce M_i sur M_j. En déduire que $\mathscr{P}_{int}$ est indépendante du référentiel d'étude. On fera l'hypothèse peu contraignante selon laquelle $\vec{f}_{i\to j}$ a la direction du vecteur $\overrightarrow{M_iM_j}$.

3. Démontrer les théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique pour ce système matériel en distinguant les forces intérieures et extérieures au système.

4. Rappeler la définition d'une force conservative dans le cas d'un système de points matériels. Introduire la notion d'énergie potentielle E_p et établir la relation entre E_p et $\vec{f}_{i,c}$ la force conservative associée qui s'exerce sur le point matériel M_i. Quelle est l'énergie potentielle associée à la force de pesanteur pesanteur (on choisira (Oz) un axe ascendant).

5. Établir alors les théorèmes de la puissance et de l'énergie mécanique.

***Exercice n^o 7 :* Glissement d'une corde sur une table**

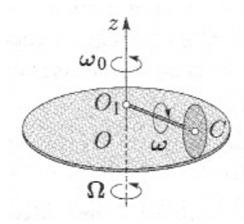
Une corde inextensible de longueur l_0 et de masse m est posée sur une table, une de ses extrémités reposant dans le vide. On appelle $z(t)$ la longueur de corde suspendue dans le vide à l'instant t.

1. On supposera que les frottements sont très faibles et que la corde est souple, c'est à dire peut se déformer sans effort. Montrer que le système est conservatif.

2. Trouver une équation satisfaite par $z(t)$.

3. La corde est initialement immobile, et $z(0) = z_0$. Déterminer l'évolution de $z(t)$.

***Exercice n^o 8 :* Mise en rotation d'un plateau**

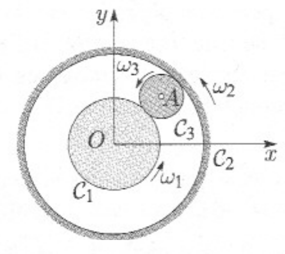


Un plateau, de rayon R, est mis en rotation, autour d'un axe (Oz), par un disque de rayon r, qui roule sans glisser sur le pourtour du plateau (cf schéma ci-contre). L'axe du disque est une tige, passant par le point O_1 de l'axe (Oz), parallèle au plateau, et tournant autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire ω_0.

1. Établir la relation entre ω_0, la vitesse de rotation du plateau Ω et celle du disque ω.

2. Exprimer la vitesse du point H le plus haut du disque en fonction de R, Ω et ω_0. Examiner le cas particulier où le plateau est bloqué.

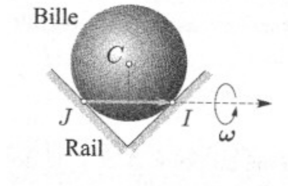
***Exercice n^o 9 :* Roulements à billes**



La figure ci-contre représente trois cercles matériels C_1, C_2, C_3, en contact entre eux, qui roulent sans glisser dans leur plan. On désigne par r_1 et r_2 les rayons de C_1 et C_2, et par A le centre de C_3.

Établir l'équation qui relie leurs vitesses angulaires ω_1, ω_2 et ω_3 par rapport au référentiel du laboratoire $\mathscr{R}$.

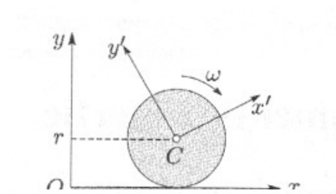
***Exercice n^o 10 :* Bille roulant sans glisser sur un rail diédrique**



Une bille sphérique (rayon r) roule sans glisser sur un rail à section droite en forme de dièdre droit (cf figure ci-contre).

Établir la relation entre la vitesse v_C du centre de la bille et sa vitesse de rotation ω.

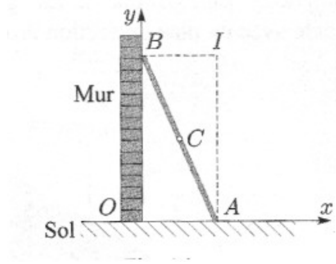
Exercice n° 11 : **Cylindre roulant sans glisser sur le sol**



Considérons un cylindre roulant sans glisser sur le sol. Il s'agit d'un mouvement plan et le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est choisi de telle manière que le mouvement se fasse parallélement au plan $Q = (xOy)$ (cf figure ci-contre).

Déterminer sans calcul la base et la roulante de ce mouvement.

Exercice n° 12 : **Barre contre un mur**



Une barre de longueur l et de section négligeable est en contact par ses extrémités A et B avec deux plans perpendiculaires xOz et yOz (cf figure ci-contre). On suppose qu'elle est mise en mouvement sous action du champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_y$.

Déterminer la base et la roulante de son mouvement.

Exercice n° 13 : **Théorème du moment cinétique dans le cas des solides (cours)**

On étudie le mouvement d'un solide $\mathscr{S}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$. On supposera que dans $\mathscr{R}$ la vitesse des points de l'axe instantané de rotation Δ ont une vitesse nulle. Il est toujours possible de se ramener à ce cas en se plaçant dans le référentiel barycentrique et en utilisant le théorème de Kœnig.

1. Montrer que le moment cinétique en un point A de l'axe instantané de rotation Δ peut se mettre sous la forme :

$$\vec{L}_A = J_\Delta \vec{\Omega} + \vec{L}_{A,\perp}$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}$, J_Δ est le moment d'inertie de $\mathscr{S}$ par rapport à Δ et $\vec{L}_{A,\perp}$ est la composante de $\vec{L}_A$ perpendiculaire à Δ. Donner les expressions de J_Δ et $\vec{L}_{A,\perp}$. On introduira pour cela le projeté orthogonal H du point courant P sur l'axe Δ.

2. Soit un repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et une boule de centre O, de masse M et de rayon R. Exprimer J_x, J_y et J_z, les moments d'inertie de cette boule par rapport aux axes (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement.

3. Montrer que $\vec{L}_{A,\perp}$ est égal au vecteur nul lorsque Δ est un axe de symétrie de la distribution de masse, on dit alors que Δ est un axe principal d'inertie.

4. Énoncer le théorème du moment cinétique et le théorème du moment cinétique en projection sur Δ.

Exercice n° 14 : **Moment d'inertie d'un cylindre creux**

Soit le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Considérons un cylindre homogène d'axe (Oz), centré en O, de rayon R_1, de hauteur h. On retire sur toute sa hauteur la matière contenue dans le cylindre d'axe (Oz) de rayon R_2. On note M la masse totale du solide obtenu.

Exprimer J_x, J_y et J_z, les moments d'inertie de ce solide par rapport aux axes (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement.

Exercice n° 15 : **Comparaison de moments d'inertie**

1. Calculer le moment d'inertie par rapport à son axe d'un cylindre (masse M, rayon R) portant toute sa masse en surface.

2. Comparer avec celui d'un cylindre homogène.

Exercice n° 16 : **Théorème de Huygens (cours)**

Le théorème de Huygens relie les moments d'inertie par rapport à deux axes parallèles Δ et Δ_C, distants de d, dont l'un (Δ_C) passe par le centre de masse C du solide de masse m.

Démontrer ce théorème. Que peut-on en déduire ?

Exercice n° 17 : **Théorème de la puissance cinétique dans le cas des solides (cours)**

On étudie le mouvement d'un solide $\mathscr{S}$ de masse m dans le référentiel $\mathscr{R}$.

1. Montrer que l'énergie cinétique de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}$ est égale à la moitié du comoment des torseurs cinétique et cinématique. C'est à dire :

$$E_{C(\mathscr{R})} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}(A)_{/\mathscr{R}}.\vec{P} + \vec{L}_{A,/\mathscr{R}}.\vec{\Omega}\right)$$

où A est un point quelconque appartenant au solide.

2. Examiner les deux cas particuliers suivants :

- $\mathscr{S}$ est en translation dans $\mathscr{R}$,
- $\mathscr{S}$ est en rotation autour d'un axe fixe Δ ou de son axe instantané de rotation.

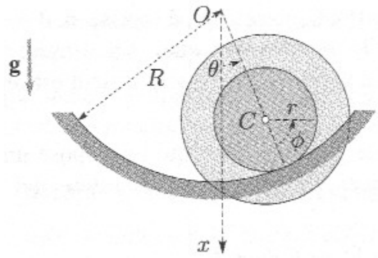
3. Que vaut la puissance des actions intérieures dans le cas d'un solide ? Justifier.

4. Soit une force volumique[1] $\vec{f_V}$ s'exerçant sur $\mathscr{S}$. Montrer que la puissance de cette action est égale au comoment du torseur de cette action avec le torseur cinématique.

5. Examiner les trois cas particuliers suivants :

- $\mathscr{S}$ est en translation dans $\mathscr{R}$,
- $\mathscr{S}$ est en rotation autour d'un axe fixe Δ ou de son axe instantané de rotation,
- l'action qui s'exerce sur $\mathscr{S}$ est un couple $\vec{\Gamma}$.

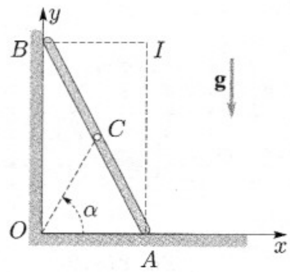
6. Un volant de masse m repose par deux tourillons sur un guide circulaire (cf figure ci-contre). Ce volant, parfaitement équilibré, a son centre de masse situé sur son axe de révolution. On utilise les angles θ et ϕ pour caractériser la position du volant dans le plan vertical (xOy) du référentiel terrestre $\mathscr{R} = Oxyz$. On désigne par I le moment d'inertie du volant par rapport à son axe de révolution, R le rayon du guide et r le rayon des tourillons.



a) Établir la condition de roulement sans glissement du volant sur son guide pour obtenir une relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$.
b) Trouver l'équation différentielle du mouvement en θ.
c) En déduire la période des petites oscillations.
d) Retrouver l'équation différentielle, établie en b), à l'aide du théorème du moment cinétique appliqué au point de contact.

Exercice n^o 18 : **Mouvement d'une tige en contact sans frottement avec deux plans perpendiculaires**

Une barre AB homogène, de section négligeable (masse m, longueur l), est posée sans vitesse initiale dans le plan Oxy : les extrémités A et B sont en contact, sans frottement, avec les axes Ox et Oy respectivement (cf schéma ci-contre). On repère la position de la barre par l'angle $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{OC})$. À l'instant initial $\alpha = \alpha_0$.



1. Quelle est la trajectoire de C. Appliquer le théorème du centre de masse et en déduire deux équations du mouvement.

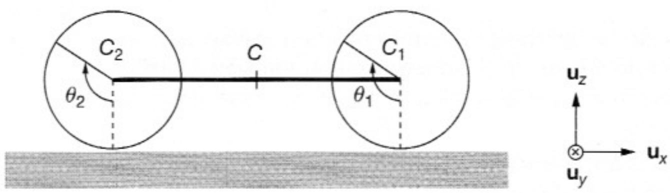
2. Trouver l'équation du mouvement en α, à l'aide du théorème du moment cinétique au point mobile I, intersection des directions des réactions de contact en A et en B.

3. En déduire une intégrale première du mouvement, c'est à dire une équation reliant $\dot{\alpha}$ et α.

4. Écrire la condition qui réalise la rupture du contact avec le plan vertical. Exprimer, en fonction de α_0, la valeur α_1 de α à l'instant où le contact en B cesse.

Exercice n^o 19 : **Étude du démarrage d'une moto**

On modélise dans cet exercice le démarrage d'une moto (cf figure ci-contre). La roue avant est assimilée à un disque homogène, de masse m, de rayon a et de centre C_1 (abscisse x_1). Sa rotation est repérée par l'angle θ_1. La roue arrière, motrice, est identique à la roue avant. L'abscisse de son centre est notée x_2 et son angle de rotation est appelé θ_2. L'ensemble carcasse + moteur (noté E) est modélisé par une tige, de longueur $2l$ et de masse M reliant C_1 à C_2. Son centre de masse C, d'abscisse x, est au milieu de C_1C_2.



Le coefficient de frottement entre les roues et le sol est noté f. L'action de E sur la roue avant se réduit à la résultante $\vec{F_1} = F_{1x}\vec{u}_x + F_{1z}\vec{u}_z$. L'action de E sur la roue arrière se compose d'une résultante $\vec{F_2}$ et d'un couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u}_y$. De même, l'action du sol sur la roue avant (resp. arrière) est une résultante $\vec{R_1} = \vec{T_1} + \vec{N_1}$ (resp. $\vec{R_2} = \vec{T_2} + \vec{N_2}$). On rappelle que $J_{C_{iy}} = \frac{1}{2}ma^2$.

[1]Le résultat resterait le même avec une force surfacique.

1. On suppose que les deux roues roulent sans glisser sur le sol. Donner des relations entre $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ et , $\dot{x}$.

2. Appliquer le théorème du centre de masse à l'ensemble de la moto. Quelles sont les forces qui la font avancer ?

3. Appliquer le théorème de la puissance cinétique à l'ensemble de la moto. Quelle est l'action qui fournit l'énergie à la moto ?

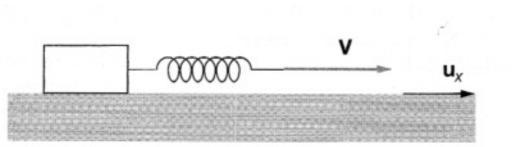
4. Appliquer les théorèmes de la dynamique à la roue avant, à la roue arrière, puis à E.

5. La roue avant peut-elle se soulever ? Et la roue arrière ?

6. On supposera désormais que $m << M$. La roue avant peut-elle glisser ? Et la roue arrière ?

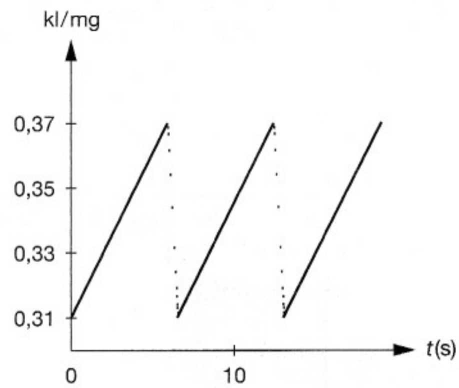
Exercice n^o 20 : **Régime fixe-glisse**

Un palet, de masse m peut glisser sur une plaque horizontale fixe (figure ci-contre). Le palet est attaché à un ressort, de raideur k, dont l'extrémité est entraînée à vitesse fixe $\vec{V} = V\vec{u}_x$. On appelle l l'élongation du ressort par rapport à sa longueur à vide. Les coefficients de frottement statique et dynamique sol-palet sont notés f_s et f_d.



1. Calculer l'élongation l_P du ressort en régime permanent. Ce régime est-il stable ?

2. En revanche, quand V est assez faible, on observe un régime, nommé fixe-glisse et dont le profil d'élongation est tracé sur le graphique ci-contre (pour indication, un point est tracé toutes les $1,5\ ms$). Dans ce régime, alternativement, le palet est fixe, puis se détache brusquement et glisse. Identifier les deux types de régimes sur cette figure et expliquer l'allure générale.



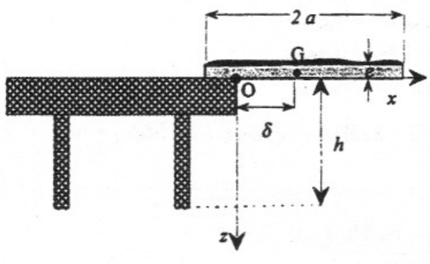
3. Calculer l'élongation l_1 en fin de phase fixe. Pour trouver celle en fin de phase glisse l_2, on écrira notamment l'équation régie par $l(t)$. En déduire f_s et f_d.

4. Expliquer pourquoi le mouvement est périodique, et évaluer sa période T_0 sachant que $m = 1,6\ kg$, $k = 1,5.10^2\ N.cm^{-1}$ et $V = 10\ \mu m.s^{-1}$. Comparer au graphique précédent.

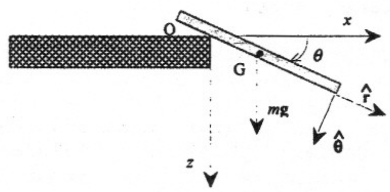
5. Le phénomène fixe-glisse est à l'origine, dans la vie courante, par exemple des pneus ou des craies qui crissent, des gonds de porte qui grincent. Dans quel domaine se trouve alors T_0 ? Comment empêcher, par exemple, des gonds de porte de grincer, ou une craie de crisser ?

Problème : **Chute d'une tartine beurrée**

Une tartine rectangulaire de longueur $2a$, de largeur b et d'épaisseur e, de masse m uniformément répartie, est placée au bord d'une table de hauteur h. Le mouvement est décrit dans le repère $\mathscr{R}(O, x, y, z)$, direct et supposé galiléen : O est sur le bord de la table, l'axe (Ox) est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table ; l'axe (Oy) est porté par le rebord de la table et l'axe (Oz), vertical, est dirigé vers le bas ; les petits côtés de la tartine sont parallèles à (Oy). À l'instant initial, la tartine, supposée d'épaisseur nulle, est horizontale, sa vitesse est nulle. Les coordonnées de son centre de masse G sont $(\delta, 0, 0)$.



La tartine amorce une rotation sans glissement autour de l'arête (Oy) du bord de la table. À l'instant t, la tartine est repérée par l'angle θ de la figure ci-contre. La vitesse angulaire est notée $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe (Gy), parallèle à (Oy) et passant par G, est $J_{Gy} = \frac{1}{3}ma^2$ et par rapport à l'axe (Oy) il est $J_{Oy} = J_{Oy} + m\delta^2 = \left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right)m$.



1. En introduisant les réactions tangentielle et normale de la table en O, notées respectivement T et N dans la base locale des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (sur la figure précédente on a $\hat{r} = \vec{e}_r$, $\hat{\theta} = \vec{e}_\theta$), exprimer le théorème du mouvement du centre de masse dans le repère galiléen $\mathscr{R}(O, x, y, z)$, en projection sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$; on notera g l'intensité de l'accélération de la pesanteur.

2. Exprimer le théorème du moment cinétique pour la tartine, en projection sur l'axe (Oy). Le coefficient de surplomb étant défini par $\eta = \delta/a$ (la distance δ est appelée distance de surplomb), en déduire le relation (qui définit, au passage, la vitesse angulaire ω_0) :

$$\omega^2 = \frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}\sin\theta = \omega_0^2 \sin\theta$$

3. Retrouver la relation précédente par des considérations énergétiques.

4. La tartine quitte la table à un instant pris comme origine des temps, l'angle θ vaut alors $\pi/2$, la vitesse angulaire initiale est ainsi ω_0. Quelle est la loi d'évolution ultérieure de l'angle θ (on suppose, bien entendu, que le mouvement reste plan et qu'il n'y a pas de contact ultérieur avec la table) ?

5. On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, à l'instant τ, elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable. Quel est l'angle limite θ_l tel que la tartine atterrisse côté pain, en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol ?

6. On suppose $\eta << 1$ ($\delta << a$) ; montrer que la durée de chute libre (cette dernière commençant lorsque $\theta = \pi/2$) pour $\theta = \theta_l$ est :

$$\tau = \sqrt{2\frac{(h-a)}{g}}$$

Calculer τ pour $2a = 10\ cm$, $h = 75\ cm$ et $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

7. Quelle est la valeur minimale η_{min} de η permettant à la tartine d'atterrir côté pain ? On pourra poser :

$$\alpha = \frac{\pi^2}{12\left(\frac{h}{a}-1\right)}$$

Dans les circonstances courantes, le coefficient de surplomb η ne dépasse guère $0,02$. Qu'en déduit-on sur la chute de la tartine ?

8. Comment les considérations précédentes seraient-elles modifiées sur la planète Mars où le champ de pesanteur vaut $g_{Mars} = 3,7\ m.s^{-2}$?